



## 2.3. Системы рациональных уравнений.

### Оглавление

|  |    |
|--|----|
| 2.3.01. Элементарные системы алгебраических уравнений. ....                | 2  |
| 2.3.02. Системы алгебраических уравнений. Метод подстановки. ....          | 4  |
| 2.3.03. Системы алгебраических уравнений. Метод расщепления системы. ....  | 7  |
| 2.3.04. Системы алгебраических уравнений. Метод сложения и вычитания. .... | 9  |
| 2.3.05. Системы алгебраических уравнений. Метод деления и умножения. ....  | 11 |
| 2.3.06. Системы алгебраических уравнений. Однородные многочлены.....       | 13 |
| 2.3.07.П. Системы алгебраических уравнений. Симметричные системы.....      | 16 |
| 2.3.08.П. Системы алгебраических уравнений. Разные замены.....             | 18 |

100ballov.by



## 2.3.01. Элементарные системы алгебраических уравнений.

Решить систему уравнений – значит найти не просто решение, а пары решений, то есть такие значения переменных  $x, y$ , которые, будучи одновременно подставленными в систему, обращают каждое ее уравнение в тождество.

**ПРИМЕР.** Решить систему уравнений:  $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$

**РЕШЕНИЕ:** Самый простой способ решения системы уравнений – подстановка. Выразим, например,  $x$  из второго уравнения:

$$x = 6 - 3y$$

И подставим в первое:

$$\begin{cases} 2(6 - 3y) - y = 5 \\ x = 6 - 3y \end{cases}$$

Теперь в первом уравнении осталась только одна неизвестная  $y$ . Находим ее:

$$12 - 6y - y = 5,$$

$$7y = 7,$$

$$y = 1.$$

Подставляем во второе уравнение и находим  $x$ .

$$x = 3.$$

Решение системы можно записать в виде  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ , а можно в виде пары чисел  $(3; 1)$ . В скобках координаты записываются по алфавиту. Вначале  $x$ , а затем –  $y$ .

**ОТВЕТ:**  $(3; 1)$ .

Если в системе не две, а больше неизвестных, то процедура решения не изменяется, а лишь становится более длинной.

### ТЕСТ 2.3.01.

Решить системы уравнений:

$$1. \begin{cases} 2x + 11y = -2 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 15x + 2y = 2 \\ 13x - 3y = -3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x + y = -2 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 5x + 4y = 3 \\ 3x - 2y = -7 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 7x + 24y = 65 \\ \frac{3}{4x+13} - \frac{1}{y} = 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{8}{191-35y} = 0 \\ 19x + 12y = 22 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 8x + 15y = 84 \\ \frac{5x + 8y - 57}{x - y} = 10 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 12x - 27y = -147 \\ \frac{x + y}{x + 2y - 28} = \frac{1}{4} \end{cases}$$



$$11. \begin{cases} 2y - 3x = 318 \\ \frac{x}{y} = \frac{13}{99} \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 2x - y = 4 \\ \frac{y}{x} = \frac{190}{99} \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 5x - y = 48 \\ \frac{x}{y} = \frac{23}{99} \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} y - 2x = 74 \\ \frac{y}{x} = 2 \frac{37}{99} \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 4x - 7y + 8z = 0 \\ x - 2y - z = -3 \\ 6x + 2y + 3z = -9 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ 20x - 10y + z = 4 \\ 5x + 10y + 5z = 18 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x + 8y - 2z = -10 \\ 3x - 2y + 5z = -4 \\ 5x + 2y + z = -12 \end{cases}$$

**ОТВЕТЫ:**

| 1           | 2            | 3   | 4            | 5  | 6                               |
|-------------|--------------|---|--------------|--|---------------------------------|
| $(-1; 0)$   | $(0; 1)$     | $(1; 2)$                                    | $(1; 1)$     | $(-1; 1)$                                  | $(-1; 2)$                       |
| 7           | 8            | 9   | 10           | 11   | 12                              |
| $(-1; 3)$   | $(-2; 5)$    | $(3; 4)$                                    | $(-10; 1)$   | $(26; 198)$                                | $\left(\frac{99}{2}; 95\right)$ |
| 13          | 14           | 15  | 16           | 17   | 18                              |
| $(69; 297)$ | $(198; 470)$ | $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$ | $(-2; 0; 1)$ | $\left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}; 2\right)$ | $(-2; -1; 0)$                   |



## 2.3.02. Системы алгебраических уравнений. Метод подстановки.

**ТЕОРЕМА.** Система уравнений:

$$\begin{cases} F(x; y) = \Phi(x; y), \\ y = f(x) \end{cases}$$

равносильна системе:

$$\begin{cases} F(x; f(x)) = \Phi(x; f(x)), \\ y = f(x). \end{cases}$$

**ТЕОРЕМА.** Система уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x; y) = \Phi_1(x; y), \\ F_2(x; y) = \Phi_2(x; y) \end{cases} (*)$$

равносильна каждой из следующих систем:

$$\begin{cases} F_1(x; y) + F_2(x; y) = \Phi_1(x; y) + \Phi_2(x; y), \\ F_1(x; y) = \Phi_1(x; y); \end{cases}$$
$$\begin{cases} F_1(x; y) + F_2(x; y) = \Phi_1(x; y) + \Phi_2(x; y), \\ F_2(x; y) = \Phi_2(x; y); \end{cases}$$
$$\begin{cases} F_1(x; y) - F_2(x; y) = \Phi_1(x; y) - \Phi_2(x; y), \\ F_1(x; y) = \Phi_1(x; y); \end{cases}$$
$$\begin{cases} F_1(x; y) - F_2(x; y) = \Phi_1(x; y) - \Phi_2(x; y), \\ F_2(x; y) = \Phi_2(x; y); \end{cases}$$
$$\begin{cases} F_1(x; y) + F_2(x; y) = \Phi_1(x; y) + \Phi_2(x; y), \\ F_1(x; y) - F_2(x; y) = \Phi_1(x; y) - \Phi_2(x; y). \end{cases}$$

**ТЕОРЕМА.** Система уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x; y) \cdot F_2(x; y) = \Phi_1(x; y) \cdot \Phi_2(x; y), \\ F_1(x; y) = \Phi_1(x; y); \end{cases}$$

является следствием системы (\*).

**ТЕОРЕМА.** Если в множество решений уравнения  $F_2(x; y) = \Phi_2(x; y)$  не входят такие пары  $(x; y)$ , при которых обе части этого уравнения обращаются в нуль, то каждая из следующих систем

$$\begin{cases} F_1(x; y) \cdot F_2(x; y) = \Phi_1(x; y) \cdot \Phi_2(x; y), \\ F_1(x; y) = \Phi_1(x; y); \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{F_1(x; y)}{F_2(x; y)} = \frac{\Phi_1(x; y)}{\Phi_2(x; y)}, \\ F_1(x; y) = \Phi_1(x; y); \end{cases}$$

равносильна системе (\*).



**ЗАПОМНИТЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Однородным многочленом от двух переменных  $x$  и  $y$  называется многочлен вида:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n,$$

где все  $a_i$  – некоторые действительные числа. Таким образом, общая степень обоих неизвестных должна в каждом слагаемом составлять одно и то же самое число.

**ЗАПОМНИТЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Симметричным многочленом от двух переменных  $x$  и  $y$  называется многочлен, который не изменяется при замене  $x$  на  $y$ , а  $y$  на  $x$ .

**ПРИМЕР.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{1}{x}, \\ y^2 - x - 5 = 0. \end{cases}$$

**РЕШЕНИЕ.** Имеем:

$$\begin{cases} \frac{2}{y^2 - 1} = \frac{1}{x}, \\ y^2 = x + 5. \end{cases}$$

Подставив в первое уравнение вместо  $y^2$  двучлен  $x+5$ , получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} \frac{2}{x+4} = \frac{1}{x}, \\ y^2 = x+5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = x+4, \\ y^2 = x+5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4, \\ y^2 = 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4, \\ y = 3; \\ x = 4, \\ y = -3. \end{cases}$$

**ОТВЕТ:**  $(4; 3)$ ,  $(4; -3)$ .

## ТЕСТ 2.3.02.

Решить системы уравнений:

1.  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0, \\ x + y + 8 = 0. \end{cases}$

2.  $\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 = 92, \\ x + 3y = 18. \end{cases}$

3.  $\begin{cases} \frac{3x+y}{x-1} - \frac{x-y}{2y} = 2, \\ x - y = 4. \end{cases}$

4.  $\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 2x^2 + y^2 = 6. \end{cases}$

5.  $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 3x - 2 = 0, \\ 2x + 3y = 5. \end{cases}$



6. 
$$\begin{cases} x + y^2 = 2, \\ 2y^2 + x^2 = 3. \end{cases}$$

7. 
$$\begin{cases} \frac{xy}{x-3} = \frac{9}{2}, \\ x + y = 12. \end{cases}$$

8. 
$$\begin{cases} \frac{y-2}{x-1} = 2, \\ y - 2x = x^2 - 1. \end{cases}$$

9. 
$$\begin{cases} 2x + y^2 = 3, \\ 3x + y^4 = 4. \end{cases}$$

10. 
$$\begin{cases} x^3 + y = 1, \\ y^3 - 4y^2 + 4y + x^6 = 1. \end{cases}$$

11. 
$$\begin{cases} y^4 + xy^2 - 2x^2 = 0, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

12. 
$$\begin{cases} \frac{4}{x-1} - \frac{5}{y+1} = 1, \\ \frac{4}{x+5} = \frac{2}{y}. \end{cases}$$

13. 
$$\begin{cases} 3x = 2y = z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 196. \end{cases}$$

14. 
$$\begin{cases} 2x^2 + y - z = -1, \\ z + y - 2x = 1, \\ x^4 + zy - y = 1. \end{cases}$$

### ОТВЕТЫ:

| 1                  | 2  | 3                 | 4  | 5   |                      |
|--------------------|--|-------------------|--|---|----------------------|
| $(-6;-2), (-4;-4)$ | $(6;4), (192;-58)$                               | $(5;1)$           | $(1;2), \left(\frac{25}{17}; \frac{22}{17}\right)$   | $(1;1), \left(\frac{82}{25}; -\frac{13}{25}\right)$ |                      |
| 6                  | 7  | 8                 | 9  | 10  |                      |
| $(1;1), (1;-1)$    | $(9;3), \left(-\frac{3}{2}; \frac{27}{2}\right)$ | $(-1;-2)$         | $(1;1), (1;-1), \left(\frac{5}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{5}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | $(1;0), (0;1), (-1;2)$                              |                      |
| 11                 |  | 12                |  | 13  | 14                   |
| $(4;2), (9;-3)$    |  | $(3;4), (-15;-5)$ |  | $(4;6;12), (-4;-6;-12)$                             | $(1;0;3), (-1;-2;1)$ |



## 2.3.03. Системы алгебраических уравнений. Метод расщепления системы.

**ПРИМЕР.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ (x-1)y = y. \end{cases}$$

**РЕШЕНИЕ.** Второе уравнение системы преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} xy - y &= y, \\ xy - 2y &= 0 \\ (x-2)y &= 0. \end{aligned}$$

Получили, что произведение двух скобок равно нулю. Разбиваем исходную систему на две, поочередно приравнивая каждую скобку к нулю и дополняя первым уравнением системы. Исходная система равносильна совокупности двух систем.

a)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \sqrt{5}, \\ y = 0, \\ x = -\sqrt{5}, \\ y = 0. \end{cases}$$

б)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x = 2. \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \\ x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$$

**ОТВЕТ:**  $(\sqrt{5}; 0), (-\sqrt{5}; 0), (2; 1), (2; -1)$ .

### ТЕСТ 2.3.03.

Решить системы уравнений:

1.  $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 2xy = 7, \\ (2x-y)y = y. \end{cases}$

2.  $\begin{cases} (x-2)(y+2) = 0, \\ x^2 + 2y^2 - 3x = 5. \end{cases}$

3.  $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 5y = 5, \\ (x-2)(y-1) = 0. \end{cases}$

4.  $\begin{cases} (x+4)(y-1) = x^2 + 5x + 4, \\ x^2 - y^2 - 3x + 8 = 0. \end{cases}$

5.  $\begin{cases} x^2 - 5y^2 - 3x - y + 22 = 0, \\ (x-3)(y-2) = y^2 - 3y + 2. \end{cases}$

6.  $\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7, \\ 2x^2 + x - 3 = (x-1)(y+5). \end{cases}$



7. 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 23, \\ x^2 + y^2 + 2xy = 9. \end{cases}$$

8. 
$$\begin{cases} 3x - 5xy + 1 = 0, \\ (y - 4x)^2 = 4. \end{cases}$$

9. 
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 9, \\ 4x^2 + xy + 4y^2 = 18. \end{cases}$$

10. 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 - 2xy, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

11. 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2), \\ x + y = 6. \end{cases}$$

12. 
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19(x - y), \\ x^3 + y^3 = 7(x + y). \end{cases}$$

**ОТВЕТЫ:**

| 1   | 2   | 3   | 4  |
|---|---|---|--|
| $\left(\pm\frac{\sqrt{7}}{2}; 0\right)$ ,<br>$\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ , $(-1; -3)$ | $\left(2; \pm\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$                                       | $(2; 3)$ , $(0; 1)$ , $\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ | $(-4; \pm 6)$ , $\left(\frac{4}{7}; \frac{18}{7}\right)$   |
| 5   | 6   | 7   | 8  |
| $(0; 2)$ , $(3; 2)$ ,<br>$(2 \pm \sqrt{5}; \pm \sqrt{5})$                               | $\left(1; -\frac{5}{4}\right)$ ,<br>$\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{2}\right)$ | $(4; -1)$ , $(-1; 4)$ ,<br>$(2; -5)$ , $(-5; 2)$    | $\left(\frac{-7 \pm \sqrt{129}}{40}; \frac{13 \pm \sqrt{129}}{10}\right)$ ,<br>$\left(\frac{13 \pm \sqrt{249}}{40}; \frac{-7 \pm \sqrt{249}}{10}\right)$ |
| 9   | 10  | 11  | 12   |
| $(2; -1)$ , $(1; -2)$ ,<br>$(-2; 1)$ , $(-1; 2)$  | $(5; 0)$ , $(0; -5)$  | $(2; 4)$ , $(4; 2)$                                 | $(0; 0)$ , $(\pm\sqrt{7}; \pm\sqrt{7})$ , $(\pm\sqrt{19}; \mp\sqrt{19})$ ,<br>$(\pm 2; \pm 3)$ , $(\pm 3; \pm 2)$  |



## 2.3.04. Системы алгебраических уравнений. Метод сложения и вычитания.

**ПРИМЕР.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0, \\ x^2 - 2xy + 1 = 0. \end{cases}$$

**РЕШЕНИЕ.** Сложим уравнения системы. Получим:

$$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 = 0, \quad (x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) = 0, \quad (x-1)^2 + (x-y)^2 = 0.$$

Тогда исходная система равносильна такой:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (x-y)^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2x = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение полученной системы, в свою очередь, равносильно системе  $\begin{cases} x=1, \\ y=x, \end{cases}$  решение

которой – пара (1;1). Непосредственной подстановкой пары (1;1) во второе уравнение полученной системы получаем решение исходной системы:

$$\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$$

**ОТВЕТ:** (1;1).

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Заметим, что иногда уравнения нужно сложить несколько раз. Иногда их нужно вычесть. А в некоторых других случаях перед сложением или вычитанием уравнений системы одно из них (или даже оба) нужно домножить на какое-нибудь число. Одним словом, нужно смотреть наперед, и выполнять такие преобразования с системой, чтобы после проведения процедуры сложения (вычитания) уравнений, полученное выражение красиво упрощалось, например, чтобы слагаемые в нем сокращались.

### ТЕСТ 2.3.04.

Решить системы уравнений:

1.  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8. \end{cases}$

6.  $\begin{cases} x^2 + 3xy = 18, \\ xy + 4y^2 = 7. \end{cases}$

2.  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6. \end{cases}$

7.  $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 2, \\ 2x^2 - y^2 + 2x - y = 4. \end{cases}$

3.  $\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10. \end{cases}$

8.  $\begin{cases} 3x^2 + xy - 2x + y - 5 = 0, \\ 2x^2 - xy - 3x - y - 5 = 0. \end{cases}$

4.  $\begin{cases} x^2 - xy = 6, \\ y^2 - xy = 3. \end{cases}$

9.  $\begin{cases} x^2 - x + 1 = y, \\ y^2 - y + 1 = x. \end{cases}$

5.  $\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ xy + x - y = 13. \end{cases}$

10.  $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 = 20, \\ y^4 + x^2y^2 = 5. \end{cases}$



11. 
$$\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 2, \\ 5xy - 2x^2 + 7x - 8y = -22. \end{cases}$$

12. 
$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 11x - 7y + 10 = 0, \\ x^2 + y^2 - 4x - 3y + 5 = 0. \end{cases}$$

13. 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 23 - 2y, \\ 2x^2 + 2y^2 + 5y = 27 + 3x. \end{cases}$$

14. 
$$\begin{cases} 5x^2 - 3y^2 + 10x - 12y = 17, \\ 2x^2 + y^2 + 4x + 4y = -2. \end{cases}$$

15. 
$$\begin{cases} x^3 + 2x^2y + xy^2 - x - y = 2, \\ y^3 + 2xy^2 + x^2y + x + y = 6. \end{cases}$$

16. 
$$\begin{cases} x + y = 3, \\ y + z = 7, \\ z + x = 2. \end{cases}$$

17. 
$$\begin{cases} y + z - x = 2, \\ z + x - y = 8, \\ x + y - z = 12. \end{cases}$$

**ОТВЕТЫ:**

| 1 *  | 2                                     | 3                | 4                              | 5                  | 6  |
|--|---------------------------------------|------------------|--------------------------------|--------------------|--|
| $(\pm 4; \pm 2),$<br>$(\pm 2; \pm 4)$          | $(\pm 3; \pm 2),$<br>$(\pm 2; \pm 3)$ | $(\pm 3; \pm 2)$ | $(\pm 2; \mp 1)$               | $(5; 2), (-2; -5)$ | $(\pm 3; \pm 1),$<br>$(\pm 12; \mp \frac{7}{2})$ |
| 7  | 8                                     | 9                | 10                             | 11                 | 12   |
| $(1; 0), (1; -1),$<br>$(-2; 0),$<br>$(-2; -1)$ | $(-1; 3), (2; -1)$                    | $(1; 1)$         | $(2; \pm 1),$<br>$(-2; \pm 1)$ | $(-2; 0), (-1; 1)$ | $(3; 1), (1; 2)$                                 |
| 13   | 14                                    | 15               | 16                             | 17                 |  |
| $(3; 2), (2; -5)$                              | $(-1 \pm \sqrt{2}; -2)$               | $(1; 1)$         | $(-1; 4; 3)$                   |                    | $(10; 7; 5)$                                     |

\* В этом примере перед тем как складывать уравнения системы нужно додуматься второе из них умножить на 2, т.е. привести систему к виду:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ 2xy = 16 \end{cases}$$

Теперь в результате сложения уравнений получим следующее:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad (x + y)^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y = 6 \\ x + y = -6 \end{cases}$$

Таким образом, осталось решить совокупность из двух простых систем:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -6 \\ xy = 8 \end{cases}$$



## 2.3.05. Системы алгебраических уравнений. Метод деления и умножения.

**ПРИМЕР.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9, \\ x - y = 9. \end{cases}$$

**РЕШЕНИЕ.** Разделим первое уравнение системы на второе. Получим:

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = 1,$$
$$x + y = 1.$$

Объединяя полученные уравнения со вторым из уравнений исходной системы:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 9. \end{cases}$$

Складываем оба уравнения, получаем  $2x = 10$ ,  $x = 5$ ,  $y = -4$ .

**ОТВЕТ:**  $(5; -4)$ .

### ТЕСТ 2.3.05.

Решить системы уравнений:

1.  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x + y = 8. \end{cases}$

2.  $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^3 + x^2 y = 12. \end{cases}$

3.  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y^6 + x^2 y^4 = 80. \end{cases}$

4.  $\begin{cases} xy^3 + x^3 y = -10, \\ x^2 y^4 + x^4 y^2 = 20. \end{cases}$

5.  $\begin{cases} x^8 y^6 = 64, \\ x^6 y^8 = 256. \end{cases}$

6.  $\begin{cases} (x - y)(9 - x) = 10, \\ (x - y)(12 - y) = 20. \end{cases}$

7.  $\begin{cases} 2xy + 6x - y^2 - 3y = 14, \\ 2x^2 + 4x - xy - 2y = 35. \end{cases}$

8.  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^2 - xy = 2. \end{cases}$

9.  $\begin{cases} x^3 - y^3 = 26, \\ x + y = 0. \end{cases}$



10. 
$$\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10. \end{cases}$$

11. 
$$\begin{cases} (x-y)(x^2 - y^2) = 24, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

12. 
$$\begin{cases} (x+y)^3(x-y)^2 = 27, \\ (x-y)^3(x+y)^2 = 9. \end{cases}$$

13. 
$$\begin{cases} xy = 1, \\ yz = 2, \\ zx = 8. \end{cases}$$

14. 
$$\begin{cases} xy + yz = 3, \\ yz + zx = 10, \\ zx + xy = 9. \end{cases}$$

15. 
$$\begin{cases} (x+y)(y+z) = 1, \\ (y+z)(z+x) = 1, \\ (z+x)(x+y) = 4. \end{cases}$$

16. 
$$\begin{cases} \frac{yz}{x} = 6, \\ \frac{zx}{y} = \frac{3}{2}, \\ \frac{xy}{z} = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

100ballov.by

**ОТВЕТЫ:**

| 1  | 2  | 3  | 4                     |
|--|--|--|-----------------------|
| (5;3)  | (2;1), (-2;5)                                | (±1;2), (±1;-2)  | (±2;±1), (±1;±2)      |
| <b>5</b>                                     | <b>6</b>                                     | <b>7</b>   | <b>8</b>              |
| (±1;2), (±1;-2)                              | (4;2), (1;1;6)                               | (3;-1), $\left(-\frac{51}{8}; -\frac{19}{4}\right)$              | (2;1), (-2;-1)        |
| <b>9</b>                                     | <b>10</b>                                    | <b>11</b>  | <b>12</b>             |
| $(\sqrt[3]{13}; -\sqrt[3]{13})$              | (±3;±2)                                      | (4;2), (2;4)   | (2;1)                 |
| <b>13</b>                                    | <b>14</b>                                    | <b>15</b>  | <b>16</b>             |
| $\left(\pm 2; \pm \frac{1}{2}; \pm 4\right)$ | $\left(\pm 2; \pm \frac{1}{2}; \pm 4\right)$ | $\left(\pm \frac{7}{4}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{1}{4}\right)$ | (±1;±2;3), (±1;±2;-3) |



## 2.3.06. Системы алгебраических уравнений. Однородные многочлены.

**ПРИМЕР.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x+y)(x^2 - y^2) = 9, \\ (x-y)(x^2 + y^2) = 5. \end{cases}$$

**РЕШЕНИЕ.** При решении таких систем наиболее удобно применять замену:

$$y = xt, \text{ где } t \in R, t \neq 0.$$

Тогда

$$\begin{cases} (x+xt)(x^2 - x^2t^2) = 9, \\ (x-xt)(x^2 + x^2t^2) = 5. \end{cases}$$

Делим первое уравнение на второе, получаем:

$$\frac{(1+t)(1-t^2)}{(1-t)(1+t^2)} = \frac{9}{5},$$

$$\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)} = \frac{9}{5},$$

$$5 + 10t + 5t^2 = 9 + 9t^2.$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0, \quad \begin{cases} t = \frac{1}{2}, \\ t = 2. \end{cases}$$

Исходная система уравнений равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} & \begin{cases} x = 2y, \\ (x-y)(x^2 + y^2) = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y, \\ y^3 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases} \\ \text{б)} & \begin{cases} y = 2x, \\ (x-y)(x^2 + y^2) = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x, \\ x^3 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = -2. \end{cases} \end{array}$$

**ОТВЕТ:**  $(2;1), (-1;-2)$ .

Итак, всегда надо делить одно уравнение на другое и производить замену:  $y = xt$ .

### ТЕСТ 2.3.06.

Решить системы уравнений:

1.  $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy + 15 = 0. \end{cases}$

2.  $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ 3x^2 + 2xy - y^2 = 15. \end{cases}$

3.  $\begin{cases} x^2 - xy + 2y^2 = 0, \\ 2x^2 + 3xy - 5y^2 = 0. \end{cases}$

4.  $\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 28, \\ x^2 + 3xy - 3y^2 = 28. \end{cases}$



5. 
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 14, \\ x^2 + xy - y^2 = 5. \end{cases}$$

6. 
$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 5y^2 = -2, \\ 3x^2 + 2xy + y^2 = 2. \end{cases}$$

7. 
$$\begin{cases} x^2 y^3 + x^3 y^2 = 12, \\ x^2 y^3 - x^3 y^2 = 4. \end{cases}$$

8. 
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^3 - y^3 = 7(x - y). \end{cases}$$

9. 
$$\begin{cases} x^2 - 5y^2 = -1, \\ 3xy + 7y^2 = 1. \end{cases}$$

10. 
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19, \\ xy(x - y) = 6. \end{cases}$$

11. 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ y^2 - xy = 6. \end{cases}$$

12. 
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 3y^2 = 80, \\ x^2 + xy - 2y^2 = -56. \end{cases}$$

13. 
$$\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 2, \\ xy + y^2 = 4. \end{cases}$$

14. 
$$\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29, \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43. \end{cases}$$

15. 
$$\begin{cases} 3x^2 - 4xy + 2y^2 = 17, \\ x^2 - y^2 = -16. \end{cases}$$

16. 
$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{5}{2}, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

17. 
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2 y + xy^2 = 6. \end{cases}$$

18. 
$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 3, \\ 3x^2 - xy + 2y^2 = 16. \end{cases}$$

19. 
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 26, \\ x^4 - y^4 = 20(x + y). \end{cases}$$



**ОТВЕТЫ:**

| 1  | 2   | 3   | 4   |
|--|---|---|---|
| $(\pm 4; \pm 5), (\pm 3\sqrt{3}; \pm \sqrt{3})$  | $(\pm 2; \pm 1),$<br>$\left( \pm 3\sqrt{\frac{15}{32}}; \pm \sqrt{\frac{15}{32}} \right)$ | $(0; 0)$  | $(\pm 4; \pm 2)$  |
| <b>5</b>   | <b>6</b>  | <b>7</b>  | <b>8</b>  |
| $(\pm 3; \pm 4),$<br>$\left( \pm \frac{8}{\sqrt{11}}; \mp \frac{1}{\sqrt{11}} \right)$ | $(\pm 1; \mp 1),$<br>$\left( \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$      | $(1; 2)$  | $(\pm 2; \pm 1),$<br>$\left( \pm \frac{5}{\sqrt{3}}; \mp \frac{4}{\sqrt{3}} \right)$    |
| <b>9</b>   | <b>10</b>   | <b>11</b>   | <b>12</b>   |
| $\left( \pm \frac{1}{2}; \mp \frac{1}{2} \right), (\pm 2; \mp 1)$                      | $(3; 2), (-2; -3)$  | $(\pm 2\sqrt{2}; \mp \sqrt{2}), (\pm 1; \pm 3)$                     | $(\pm 2; \pm 6),$<br>$\left( \pm \sqrt{\frac{8}{17}}; \pm 8\sqrt{\frac{8}{17}} \right)$ |
| <b>13</b>  | <b>14</b>   | <b>15</b>   | <b>16</b>   |
| $(\pm 3; \pm 1), (\pm \sqrt{2}; \mp 2\sqrt{2})$  | $(\pm 2; \pm 3), (\pm 3; \pm 2)$  | $(\pm 3; \pm 5), \left( \pm 1\frac{2}{3}; \pm 4\frac{1}{3} \right)$ | $(\pm 2; \pm 1)$  |
| <b>17 *</b>  | <b>18</b>   | <b>19</b>   |   |
| $(2; 1)$   | $(\pm 2; \mp 1), \left( \pm \frac{5}{\sqrt{78}}; \mp \frac{23}{\sqrt{78}} \right)$        | $(\sqrt[3]{13}; -\sqrt[3]{13}), (-1; -3), (3; 1)$                   |   |

\* Догадаемся ввести немного нестандартную замену:  $x = yt$ , тогда получим:

$$\begin{cases} y^3 t^3 - y^3 = 7, \\ y^3 t^2 + y^3 t = 6. \end{cases} \Rightarrow \frac{y^3 t^3 - y^3}{y^3 t^2 + y^3 t} = \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{t^3 - 1}{t^2 + t} = \frac{7}{6} \Rightarrow 6t^3 - 7t^2 - 7t - 6 = 0$$

Полученное уравнение будем группировать так:

$$\begin{aligned} 6t^3 - 12t^2 + 5t^2 - 10t + 3t - 6 &= 0 \\ 6t^2(t-2) + 5t(t-2) + 3(t-2) &= 0 \\ (t-2)(6t^2 + 5t + 3) &= 0 \end{aligned}$$

Из первой скобки получаем корень:  $t = 2$ , а вторая скобка корней вообще не даст. Дальше как обычно, возвращаемся к замене, добавляем одно из уравнений исходной системы и решаем полученную простенькую систему подстановкой:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x = 2y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$



## 2.3.07.П. Системы алгебраических уравнений. Симметричные системы.

**ПРИМЕР.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8, \\ x^3 + y^3 + x^2y + y^2x = 15. \end{cases}$$

**РЕШЕНИЕ.** Обратим внимание на то, что данная система является симметричной, то есть не изменяется при замене  $x$  на  $y$ , а  $y$  на  $x$ . Для решения таких систем **НАДО** использовать замену  $x+y=a$ ,  $xy=b$ . Подготовим систему к замене. Имеем:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy - 2xy + x + y = 8, \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2) + xy(x+y) = 15. \end{cases}$$
$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy + x + y = 8, \\ (x+y)(x^2 + 2xy - 3xy + y^2) + xy(x+y) = 15. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy + x + y = 8, \\ (x+y)((x+y)^2 - 3xy) + xy(x+y) = 15. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 2b + a = 8, \\ a(a^2 - 3b) + ab = 15. \end{cases}$$

Решаем полученную систему:

$$\begin{cases} -2b = 8 - a - a^2, \\ a(a^2 - 2b) = 15. \end{cases}$$
$$\begin{cases} b = \frac{a^2}{2} + \frac{a}{2} - 4, \\ a(a^2 + 8 - a - a^2) = 15. \end{cases}$$

Решая второе уравнение, получаем, что  $\begin{cases} a = 5, \\ a = 3. \end{cases}$  Подставляем в первое и имеем:

$$\begin{cases} a = 5, \\ b = 11; \\ a = 3, \\ b = 2. \end{cases}$$

Тогда исходная система равносильна совокупности двух систем:

a)  $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 11. \end{cases}$

Эта система решений не имеет.

б)  $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2; \\ x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

**ОТВЕТ:** (2;1), (1;2).



## ТЕСТ 2.3.07.

Решить системы уравнений:

1. 
$$\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 7. \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} x + 2xy + y = 10, \\ x - 2xy + y = -2. \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 42, \\ xy = 15. \end{cases}$$

4. 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 18, \\ x^2 + y^2 - xy = 13. \end{cases}$$

5. 
$$\begin{cases} xy + 2x + 2y = 5, \\ x^2 + y^2 + 3x + 3y = 8. \end{cases}$$

6. 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x + xy + y = 9. \end{cases}$$

7. 
$$\begin{cases} (x-1)(y-1) = 1, \\ x^2y + xy^2 = 16. \end{cases}$$

8. 
$$\begin{cases} xy(x-1)(y-1) = 72, \\ (x+1)(y+1) = 20. \end{cases}$$

9. 
$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = 10, \\ (x+y)(xy+1) = 25. \end{cases}$$

10. 
$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 20, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

11. 
$$\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1) = 10, \\ (x+y)(xy-1) = 3. \end{cases}$$

12. 
$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 12, \\ x + xy + y = 0. \end{cases}$$

13. 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x+y) = 23, \\ x^2 + xy + y^2 = 19. \end{cases}$$

14. 
$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

### ОТВЕТЫ:

| 1  | 2   | 3  |
|--|---|--|
| $(2;1) (1;2)$  | $(3;1) (1;3)$   | $\begin{pmatrix} (3;5) (5;3) \\ \left( \frac{-9 \pm \sqrt{21}}{2}; \frac{-9 \mp \sqrt{21}}{2} \right) \end{pmatrix}$                           |
| <b>4</b>   | <b>5</b>  | <b>6</b>   |
| $(3;4) (4;3)$<br>$(-2 \pm \sqrt{3}; -2 \mp \sqrt{3})$                                    | $(1;1)$   | $(1;4) (4;1)$  |
| <b>7</b>   | <b>8</b>  | <b>9</b>   |
| $(2;2)$<br>$(-2 \pm 2\sqrt{2}; -2 \mp 2\sqrt{2})$  | $(3;4) (4;3)$<br>$(11 \pm 2\sqrt{31}; 11 \mp 2\sqrt{31})$ | $(1;4) (4;1)$  |
| <b>10</b>  | <b>11</b>   | <b>12</b>  |
| $(1;4) (4;1)$<br>$\left( \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}; \frac{-5 \mp \sqrt{41}}{2} \right)$ | $(\pm 2;1) (1;\pm 2)$<br>$(-3;0) (0;-3)$                  | $(1 \pm \sqrt{3}; 1 \mp \sqrt{3})$   |
| <b>13</b>  |   | <b>14</b>  |
| $(3;2) (2;3)$<br>$(-5;2) (2;-5)$   |   | $(6;6)$<br>$\left( \frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}; -\frac{3(\sqrt{5}+1)}{2} \right) \left( -\frac{3(\sqrt{5}+1)}{2}; \frac{3(\sqrt{5}-1)}{2} \right)$ |



## 2.3.08.П. Системы алгебраических уравнений. Разные замены.

**ПРИМЕР.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x(x+1)(3x+5y) = 144, \\ x^2 + 4x + 5y = 24. \end{cases}$$

**РЕШЕНИЕ.** Перепишем данную систему в таком виде:

$$\begin{cases} (x^2 + x)(3x + 5y) = 144, \\ x^2 + x + 3x + 5y = 24. \end{cases}$$

Пусть  $x^2 + x = a$ ,  $3x + 5y = b$ . Тогда:

$$\begin{cases} ab = 144, \\ a + b = 24. \end{cases}$$

Отсюда:

$$\begin{cases} a = 12, \\ b = 12. \end{cases}$$

Далее:

$$\begin{cases} x^2 + x = 12, \\ 3x + 5y = 12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ x = -4, \\ 3x + 5y = 12. \end{cases}$$

**ОТВЕТ:**  $\left(3; \frac{3}{5}\right)$ ,  $\left(-4; \frac{24}{5}\right)$ .

### ТЕСТ 2.3.08.

Решить системы уравнений:

1. 
$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5. \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} x + y = 21, \\ \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{35}{6}. \end{cases}$$

4. 
$$\begin{cases} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

5. 
$$\begin{cases} \frac{1}{2x+y} + x = 3, \\ \frac{x}{2x+y} = -4. \end{cases}$$

6. 
$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{36}, \\ xy^2 - x^2y = 324. \end{cases}$$

7. 
$$\begin{cases} xy^2 + x^2y = 30, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

8. 
$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$$



9. 
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^3 y^3 = -8. \end{cases}$$

10. 
$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} = \frac{7}{2}, \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

11. 
$$\begin{cases} x^2 y - xy^2 = 6, \\ xy + x - y = -5. \end{cases}$$

12. 
$$\begin{cases} (x+y)^4 + 4(x+y)^2 = 117, \\ x-y = 25. \end{cases}$$

13. 
$$\begin{cases} (x+y+1)^2 + (x+y)^2 = 25, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

14. 
$$\begin{cases} \frac{xy}{x+3y} + \frac{x+3y}{xy} = 2, \\ \frac{xy}{x-y} + \frac{x-y}{xy} = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

15. 
$$\begin{cases} xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 13, \\ xy - \frac{1}{xy} - \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 12. \end{cases}$$

16. 
$$\begin{cases} (x^2 + y^2)x = 6y, \\ (x^2 - y^2)y = x. \end{cases}$$

17. 
$$\begin{cases} x(x+1)(3x^2 + 5y) = 144, \\ 4x^2 + x + 5y = 24. \end{cases}$$

18. 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - 2y - 5 = 0, \\ 2x^2 + 3y^2 - 2x - 6y - 13 = 0. \end{cases}$$

19. 
$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ xy = 2. \end{cases}$$

**ОТВЕТЫ:**

| 1   | 2   | 3  | 4   | 5  |
|---|---|--|---|--|
| $(\pm 3; \pm 2)$  | $(\pm 2; \pm 3),$<br>$(\pm 3; \pm 2)$     | $(18; 3),$<br>$\left(-\frac{21}{5}; \frac{126}{5}\right)$  | $\left(\frac{11}{13}; -\frac{24}{5}\right)$                 | $\left(-1; \frac{9}{4}\right), (4; -9)$                    |
| 6   | 7   | 8  | 9   | 10   |
| $(9; 12), (-12; -9)$  | $(3; 2), (2; 3), (1; -6),$<br>$(-6; 1)$   | $(3\sqrt{2}; \pm\sqrt{2}),$<br>$(-3\sqrt{2}; \pm\sqrt{2})$ | $(2; -1), (-1; 2)$  | $(2; 1), (-1; -2)$   |
| 11  | 12  | 13   | 14  | 15   |
| $(-1; 2), (-2; 1)$  | $(14; -11),$<br>$(11; -14)$               | $\left(-\frac{19}{8}; -\frac{13}{8}\right), (2; 1)$        | $\left(8; \frac{8}{5}\right), \left(-4; \frac{4}{7}\right)$ | $\left(\pm \frac{1}{2}; \pm 5\right),$<br>$(\pm 2; \pm 5)$ |
| 16  | 17  | 18   | 19  |  |
| $(\pm \sqrt[4]{8}; \pm \sqrt[4]{2}),$<br>$\left(\pm \frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{2}}; \pm \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\right), (0; 0)$ | $(3; -3), \left(-4; -\frac{36}{5}\right)$ | $(-1; -1), (-1; 3), (2; -1),$<br>$(2; 3)$                  | $(\pm 2; \pm 1), (\pm 1; \pm 2)$                            |  |